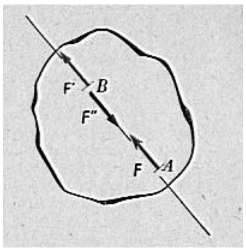
7. Mechanika tuhého tělesa

7.1 Základní poznatky
Dosud jsme se při studiu pohybových účinků sil na těleso nahrazovali pevné těleso hmotným bodem. Většinou jsme nebrali v úvahu tvar a rozměry tělesa, neuvažovali jsme otáčení tělesa. Budeme řešit problémy, kde nemůžeme tvar či rozměry tělesa zanedbat.

7.1.1 Tuhé těleso
Skutečné těleso nahradíme myšlenkovým modelem, který nazveme tuhé těleso.

Definice tuhého tělesa
Tuhé těleso je ideální těleso, jehož tvar ani objem se účinkem libovolně velkých sil nemění.

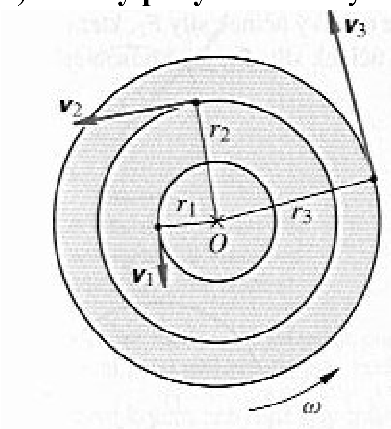


Účinek síly na dokonale tuhé těleso se nezmění, posuneme-li její působiště do libovolného bodu tělesa na vektorové přímce síly.

7.1.2 Fyzikální zanedbání
Zjednodušíme naše představy a to takto. Síly které na těleso působí, mají jen pohybové účinky a nezmění tvar ani objem tělesa. Reálně budeme zanedbávat deformační účinky sil.

7.2 Pohyb tuhého tělesa
Každý pohyb tuhého tělesa si můžeme přestavit jako pohyb složený ze dvou pohybů: pohyb posuvný (translace) a pohyb otáčivý (rotace).

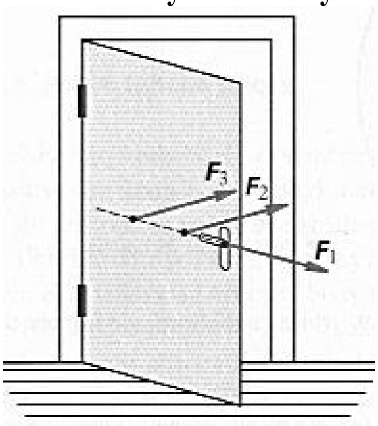
a) **posuvný pohyb** – všechny body tělesa opisují stejné trajektorie a v daném okamžiku mají stejnou rychlost.
Př. píst ve spalovacím motoru, vagon jedoucí po trati
b) **otáčivý pohyb** – všechny body mají stejnou úhlovou rychlost.



Budeme uvažovat jen případě, kdy osa kolem níž se těleso otáčí, nemění v dané vztažné soustavě svou polohu.
Při otáčení tuhého tělesa kolem nehybné osy opisují body tělesa kružnice, jejichž středy jsou na ose otáčení (viz obrázek). Úhlová rychlost ω je všude stejná (např. $v_1 = r_1 \cdot \omega$). Velikosti rychlostí jednotlivých bodů jsou přímo úměrné poloměrům kružnic, po kterých se pohybují.
Př. kotouč brusky, vrtule ventilátoru, dveře u místnosti.
c) **složený pohyb** – tuhé těleso koná otáčivý i rotační pohyb zároveň.
Př. valící se kolo, hod diskem, pohyb planet.

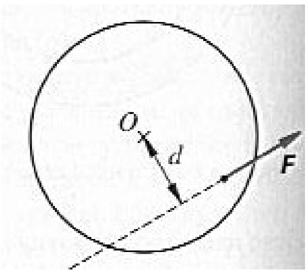
7.3 Moment síly
Uvažujeme těleso nehybné kolem své osy. Chceme-li takové těleso roztočit, musíme na ně působit silou. Uvažujeme případ, kdy síla je kolmá na osu otáčení.

7.3.1 Otáčivý účinek síly



Vše si vysvětlíme na případu otevírajících dveří (viz. obrázek). Otáčivý účinek síly závisí na velikosti síly, na jejím směru a na poloze jejího působiště. Síly F_1, F_2, F_3 mají stejnou velikost a jsou kolmé k ose otáčení dveří. Rozebereme si účinek jednotlivých sil:
F_1 – síla ležící v rovině dveří (dveře se nepohnou)
F_2 – otáčivý účinek síly je větší
F_3 – otáčivý účinek je menší
Fyzikální veličina vyjadřující otáčivý účinek síly se nazývá **moment síly vzhledem k ose otáčení.**

7.3.2 Velikost momentu síly

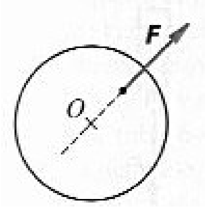


Moment síly je otáčivý účinek síly vzhledem k ose otáčení.Moment síly označíme $\vec{M}$ a je to vektorová fyzikální veličina. Velikost momentu síly je rovna součinu velikosti síly F a kolmé vzdálenosti d vektorové přímky síly od osy otáčení: , d – je rameno síly.
Jednotka momentu síly: $[M] = N \cdot m$

7.3.3.Směr momentu síly a momentová věta

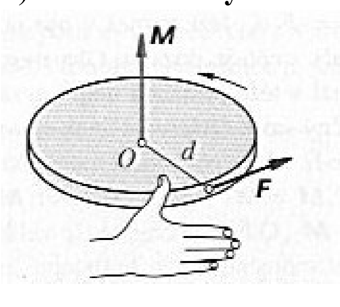
Zkusíme určit směr momentu síly. Reálně mohou nastat dvě varianty: síla nemá otáčivý účinek, síla má otáčivý účinek

a) **síla nemá otáčivý účinek**



Je-li rameno síly nulové, tj. protíná-li vektorová přímka síly osu otáčení. Moment síly je nulový.

b) **síla má otáčivý účinek**



Směr momentu síly určíme pole **pravidla pravé ruky**:

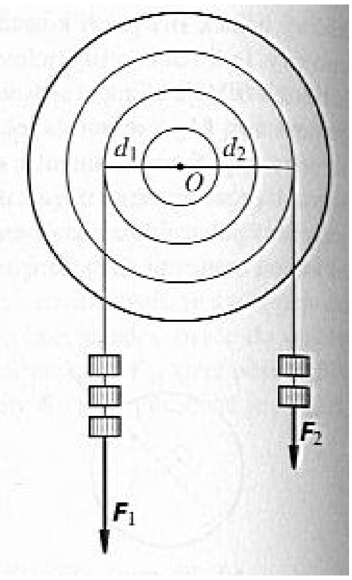
Položíme-li pravou ruku na těleso tak, aby prsty ukazovaly směr otáčení tělesa, pak vztyčený palec ukazuje směr momentu síly.

Na těleso otáčivé kolem nehybné osy může působit více sil. Jejich celkový otáčivý účinek je určen výsledným momentem sil. Výsledný moment sil $\vec{M}$ je vektorový součet momentů jednotlivých sil vzhledem k dané ose: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_n$

Jednotlivé momenty sil leží v ose otáčení a mohou mít různý směr.
Ve zvláštním případě se otáčivé účinky sil navzájem ruší. **Platí momentová věta**:

Otáčivé účinky sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy se vzájemně ruší, je-li vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose otáčení nulový. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_n = \vec{0}$

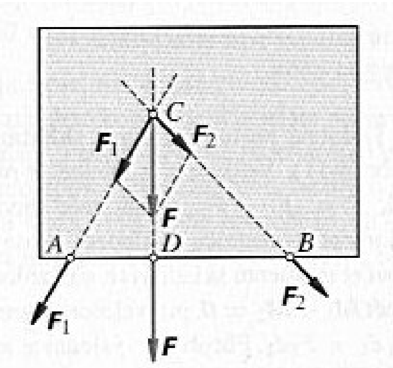
Ověříme momentovu větu na příkladu.



Určíme jednotlivé momenty sil: $M_1 = F_1 \cdot d_1$ - směřuje dopředu, $M_2 = F_2 \cdot d_2$ - směřuje dozadu (ale má opačný směr).
Otáčivý účinek se ruší, je-li součet momentů nulový:
$M = M_1 + M_2 = 0$
$M_1 = -M_2$
$F_1 \cdot d_1 = -(-F_2 \cdot d_2)$ - **mínus u součinu F_2 d_2 je kvůli opačnému směru otáčení**
$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$

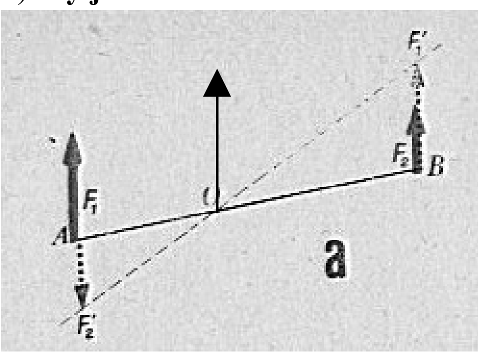
7.4 Skládání sil

Skládat síly působící na tuhé těleso znamená nahradit tyto síly jedinou silou, která má na těleso stejné účinky jako skládané síly. Tato síla se nazývá **výslednice sil**. Výslednice $\vec{F}$ je určena svou velikostí, směrem a místem působiště.
Velikost a směr výslednice jsou dány vektorovým součtem jednotlivých sil: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$.
Máme dva základní druhy sil: síly různoběžné a síly rovnoběžné
a) **síly různoběžné**



Na těleso působí dvě různoběžné síly $\vec{F}_1$ *a* $\vec{F}_2$ v různých bodech A a B. Obě síly přeneseme po vektorových přímkách do jejich průsečíku (bod C). V bodě C je složíme pomocí vektorového rovnoběžníku. Působiště výslednice $\vec{F}$ obvykle přenášíme do bodu D ležící na spojnici bodu A a B. Toto je obecný postup, který můžeme kdykoliv použít.
Výslednice sil má stejné otáčivé účinky jako skládané síly.
Pro výpočet platí tento vztah: $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$

b) **síly rovnoběžné**
1) **síly jsou souhlasně orientované**



Na těleso působí dvě rovnoběžné síly $\vec{F}_1$ *a* $\vec{F}_2$ stejného směru. Velikost obou sil je:
F = F_1 + F_2. Určíme působiště O a jeho polohu najdeme pomocí momentů sil. Součet momentů obou skládaných sil vzhledem k téže ose je nulový. Otáčivý účinek sil se vzájemně ruší, momenty $\vec{M}_1$ *a* $\vec{M}_2$ mají stejnou velikost, ale opačný směr. Výsledná síla leží blíže větší síly.
Určení působiště O graficky:

Sestrojíme pomocný vektor $\vec{F}_1'$ (velký jako $\vec{F}_1$) v působišti B a má stejnou orientaci. Druhý pomocný vektor $\vec{F}_2'$(velký jako $\vec{F}_2$) v působišti A a má opačnou orientaci než původní vektor. Spojíme přímkou vrcholy pomocných vektorů. V místě, kde nám přímka protne spojnici bodů A a B máme hledané působiště O. . Směr výsledné síly v působišti určíme podle toho, kam směřují obě síly.

Určení působiště O výpočtem:

celkovou vzdálenost označíme d

úsek AO označíme x

úsek OB označíme (d-x)

určení r_1:

$M_1 = M_2$

$F_1 \cdot x = F_2 (d - x)$

$F_1 \cdot x = F_2 \cdot d - F_2 \cdot x$

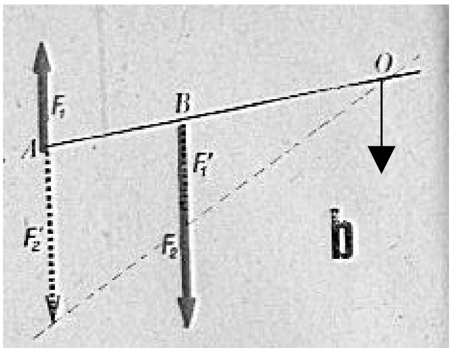
$x(F_1 + F_2) = F_2 d$

$$\boxed{x = \frac{F_2 d}{F_1 + F_2}}$$

Podobným způsobem si můžeme vyjádřit r_2.

2) **síly nesouhlasně orientované**

Určení působiště O graficky:



Sestrojíme pomocný vektor $\vec{F}_1'$ (velký jako $\vec{F}_1$) v působišti B a má opačnou orientaci. Druhý pomocný vektor $\vec{F}_2'$(velký jako $\vec{F}_2$) v působišti A a má stejnou orientaci s původním vektorem. Spojíme přímkou vrcholy pomocných vektorů. V místě, kde nám přímka protne spojnici bodů A a B máme hledané působiště O. Směr výsledné síly v působišti určíme podle toho, která síla $\vec{F}_1$ či $\vec{F}_2$ byla větší. Výsledná síla leží blíže větší síly.

Určení působiště O výpočtem:

úsek AB označíme d

úsek BO označíme x

$F_1 \cdot (d + x) = F_2 x$

$F_1 d + F_1 x = F_2 x$

$(F_1 - F_2)x = -F_1 d$

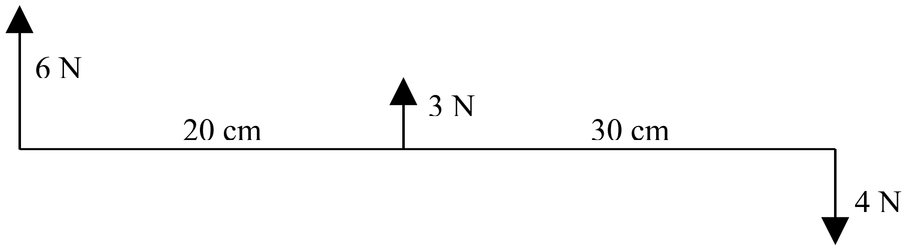
$$\boxed{x = \frac{F_1 d}{F_2 - F_1}}$$

7.5 Skládání více sil

Obecný postup řešení:
1) Složitější problém převedeme na jednodušší.
2) Libovolně vybereme dvě síly a určíme působiště těchto sil.
3) K výslednici těchto sil připočteme sílu třetí.

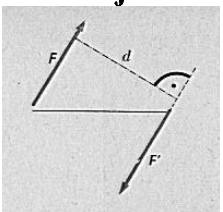
Doporučení: Nejvhodnější je sečíst nejprve souhlasně orientované síly a výslednici pak sečíst se silou zbývající.
Poznámka: Najdete zde pouze zadání dvou příkladů. Řešení si provedeme na hodině.

Vše si vysvětlíme na reálných příkladech.
Příklad 1



Příklad 2

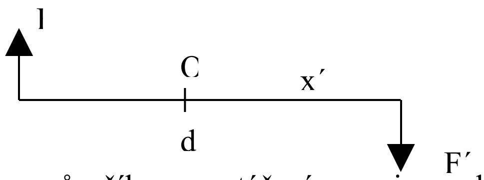
7.6 Dvojice sil



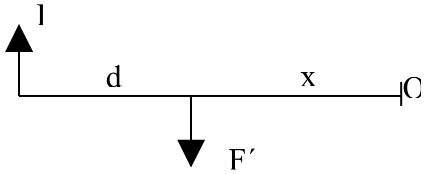
Zvláštním případem rovnoběžných sil, které působí na dokonale tuhé těleso jsou dvě stejně velké síly opačného směru (viz. obrázek, dvě síly $\vec{F}, \vec{F}'$). Nazýváme je dvojice sil. Tyto síly nemůžeme nahradit jedinou silou. Na těleso mají otáčivý účinek. Otáčivý účinek dvojce sil vyjádříme momentem dvojice sil a označíme ho D, D=Fd (d je rameno dvojice sil, vzdálenost vektorových přímek, viz. obrázek).

Zajímá nás podle čeho se těleso otáčí:
1) Nemá-li těleso nehybnou osu otáčení, otáčí se působením dvojic sil kolem osy, která prochází těžištěm tělesa kolmo k rovině dvojice.
2) Ze zkušenosti víme, že těleso, které má nehybnou osu otáčení, se působením dvojice sil otáčí kolem této osy.

Odvození momentu dvojice sil
1)



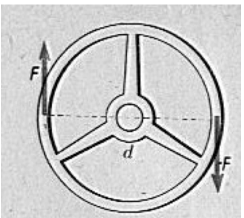
Jestliže průsečík osy otáčení s rovinou dvojice sil je mezi vektorovými přímkami, jsou momenty obou sil vzhledem k ose souhlasně orientované. Velikost výsledného momentu dvojice sil je: $D = M + M' = F(d - x') + Fx' = Fd$
2)



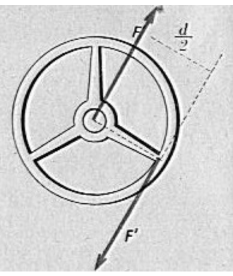
Momenty sil jsou nesouhlasně orientované. Velikost výsledného momentu dvojice sil je: $D = M - M' = F(x + d) - Fx = Fd$

Závěr: Moment dvojice sil je vždy určen vztahem D=Fd a nezávisí na poloze bodu O.

Reálný příklad: Volant

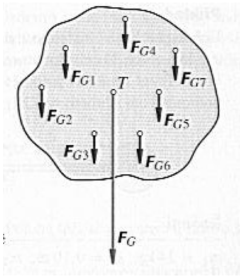


1) Působíme na volant oběma rukama.
V tomto případě je velikost momentu dvojice sil D= Fd.



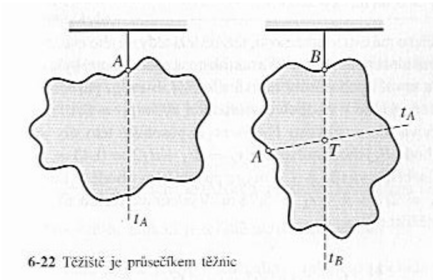
2) Působíme na volant jednou rukou.
Řidič může však uvést volant do otáčivého pohybu jen jednou rukou. Přitom působí ruka spolu s volantem na pevný čep. Reakcí na tuto sílu je síla, kterou působí čep na volant. Na volant působí dvojice sil, jejíž moment má velikost $D = F\frac{d}{2}$. Aby byl otáčivý účinek síly stejně veliký jako v prvním případě musíme působit **dvojnásobnou silou**.

7.7 Těžiště tuhého tělesa



Tuhé těleso si představujeme složené z velkého počtu hmotných bodů, jejichž vzájemné polohy se nemění. V homogenním tíhovém poli působí na jednotlivé body tělesa tíhové síly, které jsou navzájem rovnoběžné. jejich složením dostaneme výslednou tíhovou sílu $\vec{F}_G$ působící na těleso. Tíhová síla má působiště v bodě T, který nazýváme **těžiště tělesa**.

7.7.1 Určení těžiště tělesa grafickou metodou



6-22 Těžiště je průsečíkem těžnic

Postup pro určení těžiště reálného tělesa:

1) Nepravidelné těleso zavěšujeme v různých bodech na obvodu desky.
2) Při každém zavěšení se těleso ustálí tak, že těžiště je pod bodem závěsu. Přímka spojující bod závěsu a těžiště se nazývá těžnice.
3) Těžiště T je průsečíkem všech těžnic.

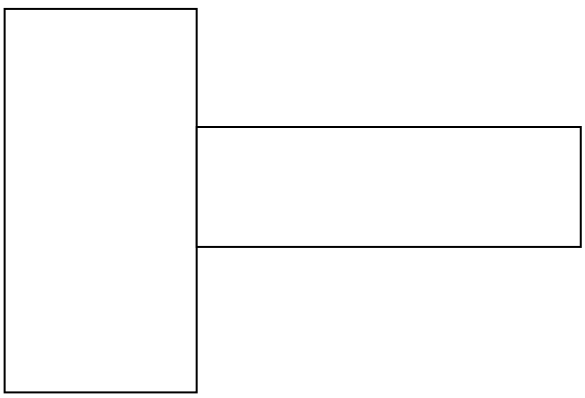
Kde se přesně těžiště nachází:
U stejnorodých těles – ve středu souměrnosti.
Krychle, koule, kvádru či válce je v jejich geometrickém středu.
Dutá tělesa (dutá koule, dutý válec, dutá krychle) leží těžiště mimo látku tělesa.

Závěr: U nepravidelných těles určujeme těžiště tělesa experimentálně (grafickou metodou). U pravidelných těles určíme polohu těžiště výpočtem.

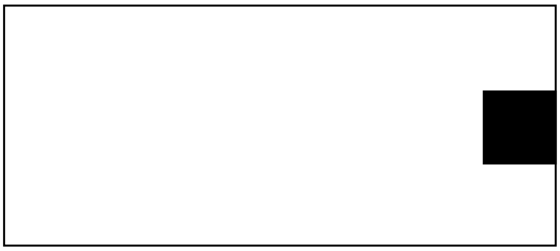
7.7.2 Určení těžiště tělesa výpočtem

Připomínka: V materiálech budete mít pouze nákresy. Výpočty provedeme společně a to z toho důvodu, že si výpočty napsané rukou lépe zapamatujete.

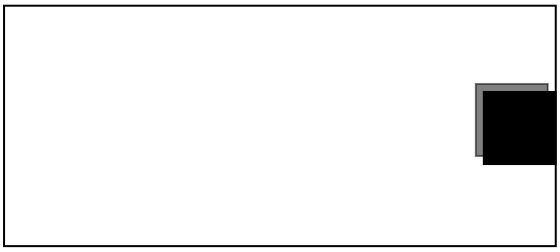
Určení těžiště hřídele



Určení těžiště vyříznuté desky



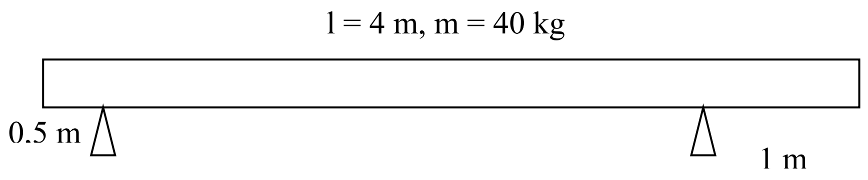
Určení těžiště přilepené desky



7.8 Rozložení síly na složky

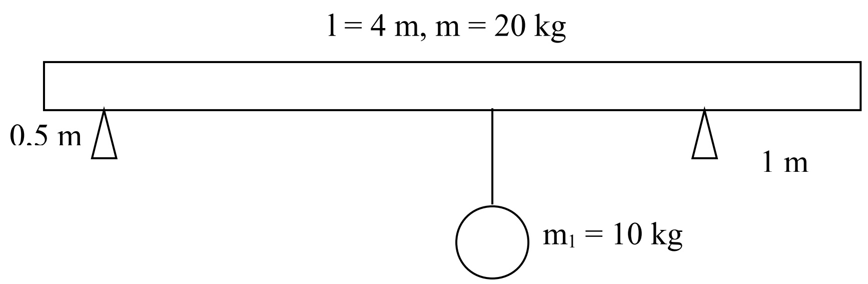
Rozložení síly na složky si vysvětlíme na dvou příkladech.

a) Rozložení síly na „kládě“



a) Rozložení síly na „kládě“ se závažím

Závaží je vzdáleno 0,5 m od těžiště klády.



7.9 Rovnovážná poloha tělesa

7.9.1 Podmínky rovnováhy

1) Těleso se nepohybuje, což znamená, že výslednice $\vec{F}$ všech sil, které na ně působí je nulová, což vyjádříme rovnicí: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = \vec{0}$

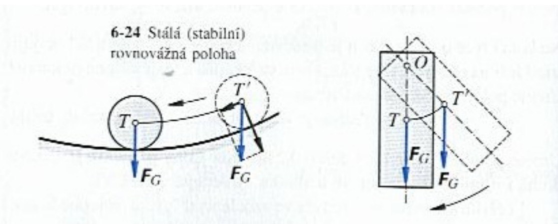
2) Těleso se neotáčí, výsledný moment sil působících na těleso je nulový. Vyjádříme to rovnicí: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots\ldots + \vec{M}_n = \vec{0}$

7.9.2 Porušení rovnováhy

Vychýlíme-li těleso z rovnovážné polohy, změní se rozložení sil působících na těleso. Podmínky rovnováhy nemusí platit. Reálně mohou nastat tři případy

1) Stálá (stabilní) rovnovážná poloha

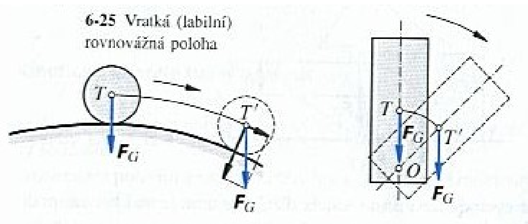
To má těleso, které se po vychýlení vrátí zpět do rovnovážné polohy. Stálou rovnovážnou polohu má např. kulička v nejnižším bodě kulové misky, kulička v dolíku.



fyzikální vysvětlení obrázků:
kulička: Při vychýlení kuličky z rovnovážné polohy působí na kuličku složka tíhové síly, směřující do rovnovážné polohy.
pravítko: Na těleso otáčivé kolem osy působí moment tíhové síly, který je otáčí zpět do rovnovážné polohy.

2) Vratká (labilní) rovnovážná poloha

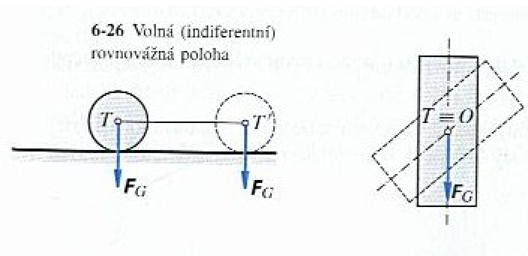
To má těleso, u které se po vychýlení z rovnovážné polohy výchylka zvětšuje a těleso se samo to rovnovážné polohy nevrátí. Např. kulička v nejvyšším bodě obrácené kulové misky nebo kulička na vrcholu.



fyzikální vysvětlení obrázků:
kulička: Při vychýlení tělesa z vratké rovnovážné polohy způsobí tíhová síla zvětšování výchylky. U kuličky na misce směřuje složka tíhové síly od rovnovážné výchylky.
pravítko: Ve vratké rovnovážné poloze je těžiště tělesa v největší výšce a jeho tíhová potenciální energie je největší, a proto se samo nemůže vrátit do původní pozice.

3) Volná (indiferentní) rovnovážná poloha

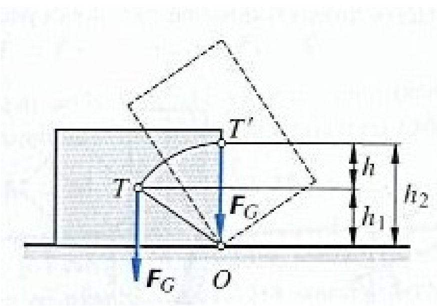
To má těleso, které po vychýlení z rovnovážné polohy zůstává v nové poloze, výchylka se nezvětšuje ani nezmenšuje, protože je stále v rovnovážné poloze.



fyzikální vysvětlení obrázků:
kulička: Těžiště kuličky se nemění.
pravítko: Těžiště je v bodě otáčení pravítka.

7.9.3 Stabilita tělesa

Těleso je ve stálé rovnovážné poloze, jestliže svislá těžnice prochází podstavou tělesa. Takovéto těleso označíme jako **stabilní**.



Stabilitu tělesa prozkoumáme na následujícím příkladě. Uvažujme stejnorodý kvádr, který stojí na vodorovné podložce. Kvádr je v rovnovážné poloze, svislá těžnice prochází podstavou kvádru. Otáčíme-li kvádr kolem jedné hrany podstavy, pozorujeme při malých výchylkách, že se kvádr vrací zpět do původní polohy. Je ve stálé rovnovážné (stabilní) poloze.

Zvětšíme-li výchylku tak, že těžiště kvádru je nad hranou podstavy a svislá těžnice prochází touto hranou, je kvádr ve **vratké** rovnovážné poloze. Při malém zvětšení výchylky se kvádr převrátí na jinou podstavu.

Určení stability tělesa

Stabilitu tělesa určuje práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso přemístili ze stálé rovnovážné polohy do polohy vratké.

U kvádru na obrázku se těžiště zvedlo z původní výšky h_1 do výšky h_2. Práce vykonaná při zvednutí těžiště kvádru o hmotnosti m o výšku h je rovna přírůstku potenciální energie kvádru: $W = mg(h_2 - h_1)$.

Závěr: Stabilita tělesa je tím větší, čím níže je těžiště ve stálé rovnovážné poloze a čím větší je vzdálenost od podstavné hrany.

7.10 Kinetická energie tuhého tělesa

Jak již víme, tuhé těleso může konat tyto pohyby: posuvný, otáčivý, případně oba současně.

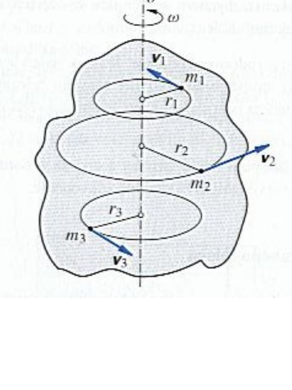
7.10.1 Kinetická energie posuvného pohybu tuhého tělesa

Při posuvném pohybu opisují všechny body tělesa stejné trajektorie a v každém okamžiku mají stejnou rychlost. Kinetická energie tělesa je rovna součtu kinetických energií jednotlivých bodů: $E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + ... + \frac{1}{2}m_nv^2$

vytekneme-li $\frac{v^2}{2}$ dostaneme následující tvar: $E_k = \frac{v^2}{2}(m_1 + m_2 + ... + m_n)$.

Protože $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$ je celková hmotnost tělesa, je kinetická energie tělesa při posuvném pohybu dána vztahem: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$.

7.10.2 Kinetická energie otáčivého pohybu tuhého tělesa



Při otáčivém pohybu tělesa kolem nehybné osy opisují body tělesa kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení. Úhlová rychlost ω je pro všechny body stejná. Rychlosti jednotlivých bodů jsou: $v_1 = r_1 \cdot \omega$, $v_2 = r_2 \cdot \omega$ a obecně: $v_n = r_n \cdot \omega$.

Kinetickou energii vypočteme opět jakou součet kinetických energii jednotlivých bodů:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + ...+ \frac{1}{2}m_nv^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + ...+ \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...+ m_nr_n^2\right).$$

Výsledný vztah je: $E_k = \frac{1}{2}\omega^2\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...+ m_nr_n^2\right)$.

Ukazuje se, že kinetická energie při otáčení závisí na úhlové rychlosti a rozložení látky v tělese.

Rozložení látky v tělese vzhledem k ose, je moment setrvačnosti J tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení a je definován vztahem: $J = \left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...+ m_nr_n^2\right)$.

Pomocí momentu setrvačnosti vyjádříme energii otáčejícího se tělesa: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}J\omega^2.}$

7.11 Tření

Jestliže je těleso v přímém styku s jiným tělesem a pohybuje se tak, že se posouvá neboli smýká či otáčí po povrchu tohoto tělesa, vzniká na styčné ploše obou těles třecí síla, která směřuje vždy proti směru rychlosti tělesa.

7.11.1 Smykové tření

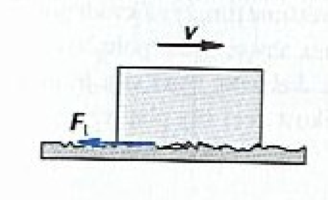
Je fyzikální jev, jehož původ je především v nerovnostech stykových ploch těles. Při posouvání jednoho tělesa po povrchu druhého tělesa nerovnosti obou ploch na sebe narážejí, deformují se a obrušují.

Vzniká tak třecí síla $\vec{F}_t$, jejíž působiště je na stykové ploše obou těles. Nikdy nemůže být tato síla nulová, i když jsou třecí plochy hladké.

Vlastnosti třecí síly:

Velikost třecí síly nezávisí na obsahu stykových ploch, nezávisí na rychlosti tělesa (při malých rychlostech). Bude-li rychlost tělesa velká třecí síla se zmenšuje.

Velikost třecí síly:



Kvádr působí na podložku tlakovou silou $\vec{F}_n$, kolmou k podložce a rovná se tíhové síle působící na kvádr a pro třecí sílu platí vztah: $\boxed{F_t = f \cdot F_n}$.

f – součinitel smykové tření a jeho rozměr je 1. Závisí na tom z čeho jsou jednotlivé plochy vyrobeny, případně jak je jejich povrch opracován.

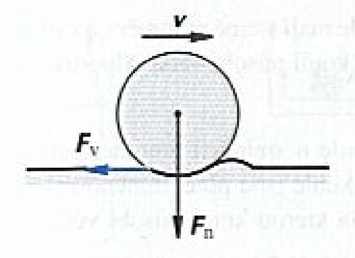
Tření v praxi:

V mnoha případech je velmi užitečné. Třecí síly umožňují naši chůzi a jízdu motorových vozidel. Proto se při náledí chodníky i vozovky sypou. Umožňuje přenos pohybu pomocí řemenic nebo třecí spojky, spojování těles hřebíky, nýty, šrouby.

Často však tření škodí. Například: v ložiscích kol motorových vozidel a strojů, vrtání, řezání.

Řešení: Třecí síly se pak zmenšují mazáním stykových ploch a jejich vyhlazováním.

7.11.2 Valivé tření



Valivé tření vzniká vždy, když se pevné těleso kruhového průřezu valí po pevné podložce. Působením tlakové síly se těleso i podložka deformuje. Deformace vyvolává odporovou sílu

$\vec{F}_v$ a pro její velikost platí: $\boxed{F_v = \xi \frac{F_n}{R}}$,

kde ξ (čti ksí) - je rameno valivého odporu a jeho jednotkou je metr. jeho hodnota závisí na materiálech, z nichž je zhotoveno těleso a podložka, a také na úpravě jejich povrchů.
R – poloměr valícího se tělesa.

7.11.3 Porovnání obou tření

Valivé tření je mnohem menší než tření smykové. V praxi, proto převádíme tření smykové na tření valivé. Při přemisťování těžkých břemen pokládáme mezi břemeno a podlahu válečky. Pro uložení hřídelů ve strojích nebo kol motorových vozidel používáme kuličková nebo válečková ložiska.